TITLE:

An Interactive Algorithm for Hierarchical Multiobjective Stochastic Linear Programming Problems (Stochastic Decision Analysis)

AUTHOR(S):

矢野, 均; 松井, 孝太

CITATION:

矢野, 均 ...[et al]. An Interactive Algorithm for Hierarchical Multiobjective Stochastic Linear Programming Problems (Stochastic Decision Analysis). 数理解析研究所講究録 2013, 1864: 157-163

ISSUE DATE:

2013-11

URL:

http://hdl.handle.net/2433/195341

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
第 1864 巻 2013 年 157-163

An Interactive Algorithm for Hierarchical Multiobjective Stochastic Linear Programming Problems

名古屋市立大学大学院・人間文化研究科　矢野　均
Hitoshi Yano
Graduate School of Humanities and Social Sciences, Nagoya City University
名古屋大学大学院・情報科学研究科　松井　孝太
Kota Matsui
Graduate School of Information Science, Nagoya University

1 Introduction

現実世界の意思決定場面では，しばしば階層構造の下でシステム全体の目標を達成することを求められる．ここで階層構造とは，複数の，システムの各部門に属する意思決定者が，相互作用をしながらそれぞれの目標を個別に達成しようとすることであるとする．例えば，Stackelberg ゲームは階層型多目的数理計画問題とみなすことができる [2]．このゲームの解，Stackelberg 解，を効率的に導出するために，Lai[3] や, Lee ら [4]，Shih ら [6] は，階層型線型計画問題に対して，各意思決定者が協力関係にあるという仮定の下で，最適性のメンバシップ及び決定力という概念を導入したファジィアプローチを提案した．

他方，実際の意思決定状況において，意思決定者は不確実性を含む情報やデータを取り扱うという困難にもしばしば直面する．Sakawa ら等 [5] は，確率計画法 [1] における確率最大化モデルを用いて確率変数係数を含む多目的線型計画問題を定式化した．しかし確率最大化モデルは，意思決定者に対して，あらかじめ目的関数の許容値を設定することを要求する．一般に，確率最大化モデルにおいて，目的関数の許容値と，対応する確率関数の値とは競合しており，上述の要求は困難を伴う．この困難を回避するために，Yano and Matsui[7] は，多目的確率線型計画問題に対してファジィアプローチを提案した．

本論文では，階層型多目的確率線型計画問題に焦点を当て，階層構造を持つ複数の意思決定者の満足する解を導出するための対話型アルゴリズムを提案する．まず，第 2 節で問題を定式化し，新たなパレート最適性の概念を導入する．第 3 節では，意思決定者の満足解を得るための，ファジィ決定に基づくマックスミニ問題を導出する．第 4 節では，第 3 節で導出したマックスミニ問題の最適解と第 2 節で定義したパレート最適解との関係性を示し，第 5 節で対話型アルゴリズムを提案する．第 6 節で本論文をまとめる．

本論文は，文献 [8] のサーベイ論文である．

2 Problem Formulation

我々が考察するのは，q 人の意思決定者 (DM_r, $1 \le r \le q$) が，共通の線型不等式制約条件の下で，各々の持つ確率変数係数を含む複数の線型目的関数を最小化しようとする問題で，以下のように定式化される：

[HMOSLP]

1st level decision maker : DM_1

$$\min(\bar{z}_{11}(\mathbf{x}),\cdots,\bar{z}_{1k_1}(\mathbf{x}))$$

....

qth level decision maker : DM_q

$$\min(\bar{z}_{q1}(\mathbf{x}),\cdots,\bar{z}_{qk_q}(\mathbf{x}))$$

subject to

$$\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)^T\in X:=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n; A\mathbf{x}\leq\mathbf{b},\mathbf{x}\geq\mathbf{0}\}\quad\square$$

ここで，A は各成分が実数であるような $m\times n$ 係数行列，$b\in\mathbb{R}^m$ であり，DM_r の各目的関数 $\bar{z}_{rl}(\mathbf{x})$, $1\leq r\leq q, 1\leq l\leq k_r$ は,

$$\bar{\mathbf{c}}_{rl}:=\mathbf{c}_{rl}^1+\bar{t}_{rl}\mathbf{c}_{rl}^2,\qquad \bar{\alpha}_{rl}:=\alpha_{rl}^1+\bar{t}_{rl}\alpha_{rl}^2$$

として,

$$\bar{z}_{rl}(\mathbf{x}):=\bar{\mathbf{c}}_{rl}\mathbf{x}+\bar{\alpha}_{rl}$$

で定義される形式的線型関数である．ただし，$\mathbf{c}_{rl}^i\in\mathbb{R}^n,\alpha_{rl}^i\in\mathbb{R}$, $1\leq i\leq 2$ であり，$\bar{t}_{rl}$ は連続かつ狭義単調増加な累積分布関数 T_{rl} を持つ確率変数であるとする．

HMOSLP には通常の数理計画法の議論はそのままでは適用できない．そこで，確率線型計画法の手法により，HMOSLP の目的関数 $\bar{z}_{rl}(\mathbf{x})$ の最小化を，目的関数が許容値 f_{rl} 以下である確率

$$p_{rl}(\mathbf{x},f_{rl}):=\Pr(\omega; z_{rl}(\mathbf{x},\omega)\leq f_{rl}),\quad 1\leq r\leq q,\quad 1\leq l\leq k_r$$

の最大化問題に置き換える．ここで，$\Pr(\cdot)$ は確率測度，ω は事象を表し，$z_{rl}(\mathbf{x},\omega)$ はある事象 ω が生起したときの目的関数 $\bar{z}_{rl}(\mathbf{x})$ の実現値を表す．

各意思決定者 DM_r, $1\leq r\leq q$ が，それぞれ目的関数の許容レベル

$$\mathbf{f}_r:=(f_{r1},\cdots,f_{rk_r}),\quad 1\leq r\leq q$$

を設定すれば，HMOSLP は次の HMOSLP1(**f**) に変換される：

[HMOSLP1(f)]

1st level decision maker : DM_1

$$\max_{\mathbf{x}\in X}(p_{11}(\mathbf{x},f_{11}),\cdots,p_{1k_1}(\mathbf{x},f_{1k_1}))$$

....

qth level decision maker : DM_q

$$\max_{\mathbf{x}\in X}(p_{q1}(\mathbf{x},f_{q1}),\cdots,p_{qk_q}(\mathbf{x},f_{qk_q}))\quad\square$$

ここで，HMOSLP1(f) の目的関数 $p_{rl}(\mathbf{x}, f_{rl})$ は，$\mathbf{c}^2_{rl}\mathbf{x} + \alpha^2_{rl} > 0, 1 \le r \le q, 1 \le l \le k_r$ であるとき，$\bar{t}_{rl}$ の累積分布関数 T_{rl} を用いて

$$p_{rl}(\mathbf{x}, f_{rl}) = T_{rl}\left(\frac{f_{rl} - (\mathbf{c}^1_{rl}\mathbf{x} + \alpha^1_{rl})}{\mathbf{c}^2_{rl}\mathbf{x} + \alpha^2_{rl}}\right)$$

と書ける．以下，本稿ではこれを仮定する．

HMOSLP1(f) を取り扱うために，新たなパレート最適性を次のように定義する：

定義 1 $\mathbf{x}^* \in X$ が HMOSLP1(f) の P-パレート最適解であるとは，

$$p_{rl}(\mathbf{x}, f_{rl}) \ge p_{rl}(\mathbf{x}^*, f_{rl}), \quad 1 \le \forall r \le q, \quad 1 \le \forall l \le k_r$$

かつ

$$p_{rl}(\mathbf{x}, f_{rl}) > p_{rl}(\mathbf{x}^*, f_{rl}), \quad 1 \le \exists r \le q, \quad 1 \le \exists l \le k_r$$

を満たすような $\mathbf{x} \in X$ が存在しないことと定義する．□

3 A Satisficing Method Based on the Fuzzy Decision

HMOSLP1(f) において，各 DM_r は，目的関数の許容値ベクトル $\mathbf{f}_r = (f_{r1}, \cdots, f_{rk_r})$ の最小化と，対応する実現確率 $\mathbf{p}_r(\mathbf{x}, \mathbf{f}_r) = (p_{r1}(\mathbf{x}, f_{r1}), \cdots, p_{rk_r}(\mathbf{x}, f_{rk_r}))$ の最大化を同時に望んでいると考えた方が自然である．この意味で HMOSLP1(f) の自然な拡張である次の問題を考察する：

[HMOSLP2]

1st level decision maker : DM_1

$$\max_{\mathbf{x} \in X}(p_{11}(\mathbf{x}, f_{11}), \cdots, p_{1k_1}(\mathbf{x}, f_{1k_1}), -f_{11}, \cdots, -f_{1k_1})$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

qth level decision maker : DM_q

$$\max_{\mathbf{x} \in X}(p_{q1}(\mathbf{x}, f_{q1}), \cdots, p_{qk_q}(\mathbf{x}, f_{qk_q}), -f_{q1}, \cdots, -f_{qk_q}) \quad \square$$

ここで，HMOSLP2 の各目的関数 $p_{rl}(\mathbf{x}, f_{rl})$ 及び f_{rl} に対して，DM_r はそれぞれ「だいたいある値以上にしたい」,「だいたいある値以下にしたい」というファジィ目標を持っていると考え，これらのファジィ目標を規定するメンバシップ関数をそれぞれ

$$\mu_{rl}(p_{rl}(\mathbf{x}, f_{rl})), \quad \nu_{rl}(f_{rl})$$

で表す．

仮定 1 (i) $\mu_{rl}(p_{rl}(\mathbf{x}, f_{rl}))$ は，$p_{rl}(\mathbf{x}, f_{rl})$ に関して連続かつ狭義単調増加であるように定める．
(ii)$\nu_{rl}(f_{rl})$ は，f_{rl} に関して連続かつ狭義単調減少であるように定める．□

メンバシップ関数 $\mu_{rl}(p_{rl}(\mathbf{x}, f_{rl}))$ 及び $\nu_{rl}(f_{rl})$ を用いると，HMOSLP2 は，次のようなファジィ目標を最大化する問題に変換できる．

[HMOSLP3]

1st level decision maker : DM$_1$

$$\max_{\mathbf{x}\in X}(\mu_{11}(p_{11}(\mathbf{x},f_{11})),\cdots,\mu_{1k_1}(p_{1k_1}(\mathbf{x},f_{1k_1})),\nu_{11}(f_{11}),\cdots,\nu_{1k_1}(f_{1k_1}))$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

qth level decision maker : DM$_q$

$$\max_{\mathbf{x}\in X}(\mu_{q1}(p_{q1}(\mathbf{x},f_{q1})),\cdots,\mu_{qk_q}(p_{qk_q}(\mathbf{x},f_{qk_q})),\nu_{q1}(f_{q1}),\cdots,\nu_{qk_q}(f_{qk_q})) \quad \Box$$

ここで，HMOSLP3 において，$\mu_{rl}(p_{rl}(\mathbf{x},f_{rl}))$ の最大化と $\nu_{rl}(f_{rl})$ の最大化は完全に競合する，すなわちトレードオフの関係にあることに注意する．

HMOSLP3 は多目的計画問題であるため，通常の数理計画の手法はそのままでは適用できない．そこで，意思決定者がファジィ決定に基づき，統合メンバシップ関数

$$D_{rl}(\mathbf{x},f_{rl}) := \min\{\mu_{rl}(p_{rl}(\mathbf{x},f_{rl})),\nu_{rl}(f_{rl})\}$$

の最大化を目指すと仮定する．このとき，意思決定者の満足する解は，次の MAX-MIN 問題を解くことで得られる：

[MAXMIN1]

$$\max_{\mathbf{x},f_{rl},\lambda}\ \lambda$$

subject to

$$D_{rl}(\mathbf{x},f_{rl}) \geq \lambda \Longleftrightarrow \begin{cases}\mu_{rl}(p_{rl}(\mathbf{x},f_{rl})) \geq \lambda \\ \nu_{rl}(f_{rl}) \geq \lambda\end{cases} \tag{1}$$

$$\mathbf{x}\in X,\quad \lambda\in[0,1],\quad 1\leq r\leq q,\quad 1\leq l\leq k_r \quad \Box$$

しかし，MAXMIN1 は q 人の意思決定者間の階層構造を反映していない．そこで，上位レベルの意思決定者が，下位レベルの意思決定者に対して優先性を持つという階層構造を反映させるために，MAXMIN1 の制約条件 (1) に対して，決定力係数ベクトル

$$\mathbf{w} := (w_1,\cdots,w_q)$$

を導入した次の問題を考える：

[MAXMIN2(w)]

$$\max_{\mathbf{x},f_{rl},\lambda}\ \lambda$$

subject to

$$D_{rl}(\mathbf{x},f_{rl}) \geq \lambda w_r \Longleftrightarrow \begin{cases}\mu_{rl}(p_{rl}(\mathbf{x},f_{rl})) \geq \lambda w_r \\ \nu_{rl}(f_{rl}) \geq \lambda w_r\end{cases} \tag{2}$$

$$\mathbf{x}\in X,\quad \lambda\in[0,1],\quad 1\leq r\leq q,\quad 1\leq l\leq k_r \quad \Box$$

仮定 2 (i) DM_r が決定力パラメータ w_{r+1} を定め，DM_q は決定力を持たないとする.
(ii)q 人の意思決定者間の階層構造を反映させるため，決定力パラメータは

$$w_1 = 1 \geq w_2 \geq \cdots\cdots \geq w_{q-1} \geq w_q > 0$$

を満たすとする. □

仮定 1 及び $\mathbf{c}_{rl}^2\mathbf{x} + \alpha_{rl}^2 > 0$ であることを用いて，MINMAX2($\mathbf{w}$) の制約条件 (2) は,

$$\begin{aligned} & D_{rl}(\mathbf{x}, f_{rl}) \geq \lambda w_r \\ \Longleftrightarrow & \nu_{rl}^{-1}(\lambda w_r) - (\mathbf{c}_{rl}^1\mathbf{x} + \alpha_{rl}^1) \geq T_{rl}^{-1}(\mu_{rl}^{-1}(\lambda w_r))(\mathbf{c}_{rl}^2\mathbf{x} + \alpha_{rl}^2) \end{aligned} \tag{3}$$

と，決定変数 f_{rl} を含まない形に変形することができる. 従って，MINMAX2($\mathbf{w}$) は，次の問題と等価である：

[MAXMIN3(w)]

$$\max_{\mathbf{x} \in X, \lambda \in [0,1]} \lambda$$

subject to

$$\begin{aligned} & \nu_{rl}^{-1}(\lambda w_r) - (\mathbf{c}_{rl}^1\mathbf{x} + \alpha_{rl}^1) \geq T_{rl}^{-1}(\mu_{rl}^{-1}(\lambda w_r))(\mathbf{c}_{rl}^2\mathbf{x} + \alpha_{rl}^2) \\ & \qquad 1 \leq r \leq q, \quad 1 \leq l \leq k_r \quad \square \end{aligned} \tag{4}$$

ここで，MAXMIN3($\mathbf{w}$) の制約条件 (4) は，$\lambda \in [0, 1]$ を固定する毎に線型の不等式制約条件となることに注意する. 従って，MAXMIN3($\mathbf{w}$) の最適解は，λ に関する二分法と，線型計画法における 2 段階単体法の第 1 段階，すなわち実行可能性のテスト段階，の混合アルゴリズムによって導出することができる.

4 Pareto Optimality of an Optimal Solution of MAXMIN3(w)

MAXMIN3($\mathbf{w}$) の最適解と HMOSLP1($\mathbf{f}$) の P-パレート最適解との間には次のような関係が成り立つ.

定理 1 ($\mathbf{x}^*$, λ^*) が MAXMIN3($\mathbf{w}$) の一意的な最適解ならば，$\mathbf{x}^* \in X$ は HMOSLP1($\mathbf{f}^*$) の P-パレート最適解である. ここで，$\mathbf{f}^*$ は,

$$\mathbf{f}^* = (\nu_{11}^{-1}(\lambda^* w_1), \cdots, \nu_{1k_1}^{-1}(\lambda^* w_1), \cdots, \nu_{q1}^{-1}(\lambda^* w_q), \cdots, \nu_{qk_q}^{-1}(\lambda^* w_q))$$

で与えられる HMOSLP の目的関数の目標値ベクトルである. □

定理 1 において，MAXMIN3($\mathbf{w}$) の最適解 ($\mathbf{x}^*$, λ^*) に対して $\mathbf{x}^*$ が一意的でなければ，解の P-パレート最適性は保証されない. この場合，MAXMIN3($\mathbf{w}$) の最適解 ($\mathbf{x}^*$, λ^*) が P-パレート最適解であるかどうかを確認する必要がある. このために，次の問題を考える.

[P-パレート最適性のテスト問題]

$$\max_{\mathbf{x} \in X, \epsilon_{rl} \geq 0} \sum_{r=1}^{q} \sum_{l=1}^{k_r} \epsilon_{rl}$$

subject to

$$\begin{aligned} & (c_{rl}^1\mathbf{x} + \alpha_{rl}^1) - T_{rl}^{-1}(\mu_{p_{rl}}^{-1}(\lambda^* w_r))(c_{rl}^2\mathbf{x} + \alpha_{rl}^2) + \epsilon_{rl} \\ & = (c_{rl}^1\mathbf{x}^* + \alpha_{rl}^1) - T_{rl}^{-1}(\mu_{p_{rl}}^{-1}(\lambda^* w_r))(c_{rl}^2\mathbf{x}^* + \alpha_{rl}^2) \\ & \qquad 1 \leq r \leq q, \quad 1 \leq l \leq k_r \quad \square \end{aligned}$$

P-パレート最適性のテスト問題について，次の事実が成り立つ．

定理 2 パレート最適性のテスト問題の最適解 $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\epsilon}_{rl})$ において，

$$\tilde{\epsilon}_{rl} = 0, \quad 1 \le \forall r \le q, \quad 1 \le \forall l \le r_k$$

ならば，$\mathbf{x}^*$ は P-パレート最適解．一方，ある r 及び l に対して，

$$\tilde{\epsilon}_{rl} > 0$$

ならば，$\tilde{\mathbf{x}}$ が P-パレート最適解．□

5 An Interactive Algorithm

HMOSLP1(f) の P-パレート最適解集合の中から，階層構造を持つ意思決定者 DM_r，$1 \le r \le q$ の満足解を導出するために，対話型アルゴリズムを以下に示す．

Step1 ：HMOSLP2 の各目的関数 $p_{rl}(\mathbf{x}, f_{rl})$，$f_{rl}$ に対して，仮定 1 を満たすようにメンバシップ関数 $\mu_{rl}(p_{rl}(\mathbf{x}, f_{rl}))$, $\nu_{rl}(f_{rl})$ を設定する．

Step2：決定力パラメータの初期値を $w_r = 1, 1 \le r \le q$ と設定する．

Step3：MAXMIN3(**w**) に対して，λ に関する二分法と 2 段階単体法の第 1 段階の混合アルゴリズムを用いて最適解 $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ を導出する．

Step4：最適解 $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ に対して，P-パレート最適性のテスト問題を解く．

Step5：各意思決定者が DM_r，$1 \le r \le q$ が現在のメンバシップ関数値に満足していれば終了．DM_s が現在のメンバシップ間数値に不満を持っていれば，決定力パラメータ $\mathrm{w}_s + 1$ を以下の仮定 3 に基づいて更新し，Step4 に戻る：

仮定 3（決定力パラメータの更新ルール） ある添字 $t > s + 1$ で，$w_{s+1} < w_t$ となるものが存在するとき，$w_t = w_{s+1}$ とおく．□

6 Conclusion

本論文では，階層型多目的確率線型計画問題 (HMOSLP) を定式化し，階層構造を持つ複数の意思決定者の満足解を導出する手法として，対話型アルゴリズムを提案した．まず，形式的な数理計画問題である HMOSLP を既存の数理計画法で取り扱うために，確率最大化モデルを適用した．従来の確率最大化モデルでは，各意思決定者が目的関数の許容値を設定するのに対して，提案手法では目的関数の許容値及び対応する確率分布関数に対するファジィ目標のメンバシップ関数を設定する．これによって，目的関数の許容値及び対応する確率分布関数値の間の均衡が期待できる．

今後の課題としては，実データを用いた数値実験を行う必要がある．特に，作物の価格が確率変動するという状況の下で，どの作物をどれだけの面積で栽培するべきかを決定する，農業分野の作付け計画問題への応用が考えられる．また，本論文で取り扱った問題の理論的拡張として，randomness と fuzziness という 2 種類のあいまいさを同時に取り扱う fuzzy random variable や random fuzzy variable を係数に含むような線型計画問題への拡張を試みる．

参考文献

[1] 石井博昭 "確率論的最適化" 数理計画法の応用：理論編（講座・数理計画法；*10*），pp.1-40, 産業図書, 1982.

[2] Anandalingam, G., "A mathematical programming model of decentralized multi-Level systems" *Journal of Operational Research Society*, 39, pp.1021- 1033, 1988.

[3] Lai, Y. J. "Hierarchical optimization : a satisfactory solution" *Fuzzy sets and systems*, 77, pp.321-335, 1996.

[4] Lee, E.S. and Shih, H. "Fuzzy and Multi-level Decision Making" *Springer* , 2001.

[5] Sakawa, M., Nishizaki, I. and Katagiri, H. "Fuzzy Stochastic Multiobjective programming" *Springer* , 2011.

[6] Shih, H., Lai, Y.-J. and Lee, E.S., "Fuzzy approach for multi-level programming problems" *Computers and Operations Research* , 23, pp. 73-91, 1996.

[7] Yano, H. and Matsui, K. "Fuzzy Approaches for Multiobjective Fuzzy Random Linear Programming Problems Through a Probability Maximization Model" *Lecture Notes in Engineering and Computer Science: Proceedings of The International MultiConference of Engineers and Computer Scientists 2011* , IMECS 2011, 16-18 March, 2011, Hong Kong, pp. 1349-1354.

[8] Yano, H. and Matsui, K. "Hierarchical Multiobjective Stochastic Linear Programming Problems Based on the Fuzzy Decision" *Iaeng Transactions on Engineering Technologies Volume 7: Special Edition of the International Multiconference of Engineers and Computer Scientists 201, pp.1-14, World Scientific Publishing Company*, 2011.